# Duality with expanding maps and shrinking maps, and its applications to Gauss maps

AUTHOR(S):

古川, 勝久

代数幾何学シンポジウム記録
2012年度 pp.30-40



# Duality with expanding maps and shrinking maps, and its applications to Gauss maps

古川 勝久 (早大理工)

## 1 Introduction

任意標数の代数閉体上の射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して, ガウス写像 $\gamma$ を

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(\dim X, \mathbb{P}^N) : x \mapsto \mathbb{T}_x X$$

により定義する. ただし, $\mathbb{T}_x X$ は非特異点 $x \in X$ に対する $\mathbb{P}^N$ 内の埋込み接空間を表す. また, 一般に有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が分離的であるとは, $K(X)/K(f(X))$ が分離的であることを言う. 本稿では, 主にガウス写像 $\gamma$ が**分離的**である場合について考察し「分離的ガウス写像のファイバー線型性」などの結果について解説する. なお, 本稿で解説する結果は論文 [Fur12b] にて得られたものであり, 議論のさらなる詳細などについてはそれを参照されたい.

はじめに, 標数零においては**射影多様体の再帰性**とよばれるところの,「すべての射影多様体 $X$ に対し等号 $X^{**} = X$ が成立する」という性質が $\gamma$ を調べる上で有用である (任意標数では $C(X) = C(X^*)$ が成立するとき再帰的であると定義する; 詳細は §4 にて補足する). 一方で正標数においては, たとえ $X$ のガウス写像が分離的であっても, $X$ の再帰性は成立しない例が存在する (楫 [Ka03a]・深澤 [Fuk06b] の各氏による, Kleiman-Piene の問題の否定的解決として知られている). そこで, 本研究では再帰性にかわるものとして, 任意標数での $\gamma$ の調査のために, expanding map および shrinking map という写像に着目した (詳細は §2 で後述). これらの写像を用いて得られた主結果 (定理 7) から導かれる事のひとつが以下の定理である:

**定理 1** ([Fur12b, Thm. 1.1])**.** 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ のガウス写像 $\gamma$ が**分離的**であるとする. このとき $\gamma$ の一般ファイバー (の閉包) は $\mathbb{P}^N$ 内の**線型多様体**となる (特に**連結**となる).

さて, $X \subset \mathbb{P}^N$ を線型多様体ではないとする. この時, $X$ が非特異ならば $\gamma$ は**有限射**となる事が知られている (Zak [Z, I, 2.8. Cor.]). この事実と定理 1とをあわせると以下の系を得る:

**系 2** ([Fur12b, Cor. 3.7])**.** 射影多様体 $X$ が非特異ならば, 分離的ガウス写像 $\gamma$ は**双有理**となる.

幾何学的には, この $\gamma$ の双有理性は「一般の埋込み接空間は**唯一の点**でのみ $X$ と接する」ことを意味している.

標数零においては, 上述の「ガウス写像の一般ファイバーの線型性」は古典的に知られた結果であり (Griffiths-Harris [GH, (2.10)], Zak [Z, I, 2.3. Thm.]), 特に, Kleiman-Piene の両氏により再帰性をもちいた証明があたえられていた ([KP91, pp. 108–109]). また一方で, 正標数においては, $\gamma$ が非分離的な場合にその一般ファイバーが線型とならない例が存在する (楫 [Ka86] [Ka89], Rathmann [R87], 野間 [N01], 深澤 [Fuk05] [Fuk06a] の各氏による). このことから, 「分離的ガウス写像に対して一般ファイバーの線型性は成立するか？」という問題が提起された ([Ka03b] など). 定理 1によりこの問題は肯定的に解かれたこととなる.

以下では, §2 にて expanding map・shrinking map の定義を紹介し, それらを用いて得られる主結果について解説する. つぎに, §3 にて, 定理 1の内容にあたる主結果の一部について証明を見てゆく.

# 2 Expanding maps and shrinking maps

## 2.1 定義

ここでは表題の有理写像の定義を与えてゆく. なお, shrinking map は, もともと標数零での「Gauss image の特徴づけ」を行うために, Landsberg と Piontkowski との各氏により独立に導入されたものであった ([IL, p. 93] の記述によると 1996 年頃のこととなる; [FP, 2.4.7] についても参照). さらに本研究では, expanding map として shrinking map の双対にあたるものを定義した. これは後でみる様にガウス写像の一般化となるものである.

**定義 3.** グラスマン多様体の部分多様体 $\mathscr{X} \subset \mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)$ に対し, expanding map $\gamma : \mathscr{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(m^+, \mathbb{P}^N)$ が以下の様に定義される ($m, m^+$ は $m \leqslant m^+$ を満す整数である).

はじめに, $\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^N)$ に対し $\mathscr{Q}_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)}$ および $\mathscr{S}_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)}$ により, その上の階数 $m+1$ の universal quotient bundle と 階数 $N-m$ の universal subbundle とを表す (ここで, $0 \to \mathscr{S}_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)} \to H^0(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(1)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)} \to \mathscr{Q}_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)} \to 0$ なる完全列が成立する). また, $\mathscr{Q}_{\mathscr{X}} :=$

$\mathcal{Q}_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)}|_{\mathscr{X}}$ により $\mathscr{X}$ 上の universal quotient bundle を表わすことにする (以下, $\mathcal{S}_{\mathscr{X}}$ なども同様に定義する). さて, 層の準同型写像 $\varphi$ を合成写像

$$\varphi : \mathcal{S}_{\mathscr{X}^{sm}} \to \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{S}_{\mathscr{X}^{sm}}, \mathcal{Q}_{\mathscr{X}^{sm}}), \mathcal{Q}_{\mathscr{X}^{sm}}) \to \mathcal{H}om(T_{\mathscr{X}^{sm}}, \mathcal{Q}_{\mathscr{X}^{sm}})$$

により定める. ただし, 一番目の写像は $\mathcal{Q}_{\mathscr{X}} \otimes \mathcal{Q}_{\mathscr{X}}^{\vee} \to \mathcal{O}$ の双対から, 二番目の写像は $T_{\mathscr{X}^{sm}} \hookrightarrow T_{\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)}|_{\mathscr{X}^{sm}} = \mathcal{H}om(\mathcal{S}_{\mathscr{X}^{sm}}, \mathcal{Q}_{\mathscr{X}^{sm}})$ から導かれたものである. さて, 整数 $m^+$ ($m \leqslant m^+ \leqslant N$) を, 一般点 $x \in \mathscr{X}$ に対し

$$\dim(\ker\varphi \otimes k(x)) = N - m^+$$

を満たすものとして取る. すると, ある開集合 $\mathscr{X}^\circ \subset \mathscr{X}$ が取れて, $\ker\varphi|_{\mathscr{X}^\circ}$ は階数 $N-m^+$ の $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\circ} \simeq H^0(\check{\mathbb{P}}^N, \mathcal{O}(1))^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\circ}$ の subbundle となる (ここで $\check{\mathbb{P}}^N := \mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N)$ は双対射影空間を表す). これにより, グラスマン多様体の普遍性から,

$$\gamma = \gamma_{\mathscr{X}/\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)} : \mathscr{X}^\circ \to \mathbb{G}(m^+, \mathbb{P}^N)$$

なる射を得られ, これを $X$ の expanding map と呼ぶこととする.

**注 4.** $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{G}(0, \mathbb{P}^N)$ に対して, expanding map $\gamma = \gamma_{X/\mathbb{P}^N}$ はガウス写像 $X \dashrightarrow \mathbb{G}(\dim(X), \mathbb{P}^N)$ に一致する. と言うのも, 上の定義の設定のもとで, $\mathcal{S}_{\mathbb{P}^N} = \Omega^1_{\mathbb{P}^N}(1)$ かつ $\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ であり, 故に $\varphi$ は自然な準同型写像 $\Omega^1_{\mathbb{P}^N}(1)|_X \to \Omega^1_X(1)$ に一致する. このことから等号 $\ker\varphi = N^{\vee}_{X/\mathbb{P}^N}(1)$ を得る.

**定義 5.** 部分多様体 $\mathscr{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ に対し shrinking map $\sigma : \mathscr{Y} \dashrightarrow \mathbb{G}(M^-, \mathbb{P}^N)$ が以下の様に定義される ($M, M^-$ は $M \geqslant M^-$ なる整数である).

層の準同型写像 $\Phi$ を合成写像

$$\Phi : \mathcal{Q}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}} \to \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{Q}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}}, \mathcal{S}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}}), \mathcal{S}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}}) \to \mathcal{H}om(T_{\mathscr{Y}^{sm}}, \mathcal{S}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}})$$

として定める. ただし二番目の写像は $T_{\mathscr{Y}^{sm}} \hookrightarrow T_{\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)}|_{\mathscr{Y}^{sm}} = \mathcal{H}om(\mathcal{Q}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}}, \mathcal{S}^{\vee}_{\mathscr{Y}^{sm}})$ により導かれるものである. ここで整数 $M^-$ ($-1 \leqslant M^- \leqslant M$) を, 一般点 $y \in \mathscr{Y}$ に対し

$$\dim(\ker\Phi \otimes k(y)) = M^- + 1$$

を満たすものとして取る. すると, ある開集合 $\mathscr{Y}^\circ \subset \mathscr{Y}$ に対し, $\ker\Phi|_{\mathscr{Y}^\circ}$ は階数 $M^- + 1$ の $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\circ}$ の subbundle となり,

$$\sigma = \sigma_{\mathscr{Y}/\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)} : \mathscr{Y}^\circ \to \mathbb{G}(M^-, \mathbb{P}^N)$$

なる射を誘導する. これが shrinking map と呼ばれるものとなる.

注 **6.** $\mathscr{X} \subset \mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)$ に対して, 同一視 $\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(N-m-1,\check{\mathbb{P}}^N)$ の下で対応する多様体を $\check{\mathscr{X}} \subset \mathbb{G}(N-m-1,\check{\mathbb{P}}^N)$ により表す. この時, $\gamma_{\mathscr{X}/\mathbb{G}(m,\mathbb{P}^N)}$ は shrinking map

$$\sigma_{\check{\mathscr{X}}/\mathbb{G}(N-m-1,\check{\mathbb{P}}^N)} : \check{\mathscr{X}} \dashrightarrow \mathbb{G}(N-m^+-1,\check{\mathbb{P}}^N)$$

と $\mathbb{G}(m^+,\mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(N-m^+-1,\check{\mathbb{P}}^N)$ の下で同一視することができる. 同様にして, $\sigma_{\mathscr{Y}/\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)}$ を expanding map $\gamma_{\check{\mathscr{Y}}/\mathbb{G}(N-M-1,\check{\mathbb{P}}^N)}$ と同一視することができる.

## 2.2 主結果

部分多様体 $\mathscr{Y} \subset \mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)$ に対し, shrinking map $\sigma : \mathscr{Y} \dashrightarrow \mathbb{G}(m_0,\mathbb{P}^N)$ を取る. 定義 5の様に, $M, m_0$ は $M \geqslant m_0$ なる整数である ($m_0 := M^-$ とおく). また, $\mathscr{X}_0$ により $\sigma(\mathscr{Y}) \subset \mathbb{G}(m_0,\mathbb{P}^N)$ の閉包を表し, $U_{\mathscr{X}_0} \subset \mathscr{X}_0 \times \mathbb{P}^N$ により $\mathscr{X}_0$ 上の universal family を表す. また, $\pi_0 : U_{\mathscr{X}_0} \to \mathbb{P}^N$ をその射影とする. さて

$$\sigma^* U_{\mathscr{X}_0} \subset \mathscr{Y} \times \mathbb{P}^N$$

を $U_{\mathscr{X}_0}$ の $\sigma$ の下での引戻しの閉包として定め, $\sigma^*\pi_0 : \sigma^* U_{\mathscr{X}_0} \to \mathbb{P}^N$ によりその射影を表す. ここまでの $\sigma$ や $\sigma^*\pi_0$ やの構成は $\mathscr{Y}$ のみに依存することを注意しておく.

つぎに $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し

$$\Gamma(X) := \overline{\{(\mathbb{T}_x X, x) \in \mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N) \times \mathbb{P}^N \mid x \in X^{sm}\}}$$

により埋込み接空間とその接点の incidence variety を表わすこととする.

**定理 7** ([Fur12b, Thm. 3.1])**.** 整数 $N, M$ $(0 < M < N)$ について, $M$ 次元射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ と, 閉部分多様体 $\mathscr{Y} \subset \mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)$ とを取る. また $\sigma$ などを上の様に決める. このとき以下の三条件は同値となる:

(a) ガウス写像 $\gamma = \gamma_X : X \dashrightarrow \mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)$ は分離的で, その像 (の閉包) は $\mathscr{Y}$ に一致する.
(b) $\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N) \times \mathbb{P}^N$ 内にて $\Gamma(X) = \sigma^* U_{\mathscr{X}_0}$ が成立する.
(c) $\sigma^*\pi_0 : \sigma^* U_{\mathscr{X}_0} \to \mathbb{P}^N$ は分離的かつ generically finite で, その像は $X$ に一致する (特に, 像の次元が $M$ となる).

系 **8.** 条件 (a-c) のいづれかが成立するとする. この時 $m_0 = M - \dim(\mathscr{Y})$ が成立し, また, つ

ぎの図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd} U_{\mathscr{X}_0} \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, dashed, "\gamma_X"] \\ \mathscr{X}_0 \arrow[r, dashed, "\gamma_{\mathscr{X}_0}"'] & \mathscr{Y}. \end{tikzcd}$$

ここで $\gamma_{\mathscr{X}_0}$ は $\mathscr{X}_0$ の expanding map であり, 実のところ双有理で shrinking map $\sigma$ の逆写像となる. また, 一般点 $y \in \mathscr{Y}$ に対し, $\sigma(y) \in \mathscr{X}_0$ はファイバー $\gamma_X^{-1}(y) \subset \mathbb{P}^N$ の閉包で得られる線型多様体に対応する.

**注 9.** 定理 7における “(a) ⇒ (b)” の部分は, 定理 1で述べたところの「分離的ガウス写像の一般ファイバー線型性」の成立を導く. また “(c) ⇒ (a)” の部分は Landsberg と Piontkowski との各氏による「Gauss image の特徴づけ」の任意標数での一般となるもので「グラスマン多様体の部分多様体が分離的ガウス写像の像であるための同値条件」を与えている.

**注 10.** 実際の証明では “(a) ⇒ (b)” および “(c) ⇒ (a)” は一つ枠組みのなかで議論をすすめることができる. と言うのも, 注 6でみた様に, “(c) ⇒ (a)” の中で $\sigma$ と $\gamma$ との役割をいれかえると, 似た形の状況の下である程度まで話ができるためである.

本稿では, “(a) ⇒ (b)” の部分を示し 定理 1 を得る部分について見てゆく. そのために次節にて, ガウス写像 $\gamma$ と shrinking map $\sigma$ の合成 $\sigma \circ \gamma$ について調査してゆく. (上の注にのべた様に “(c) ⇒ (a)” まで示すことを考える場合には, $\gamma$ を expanding map として議論した方が効率がよい. 本稿では定理 7全体の証明はしないので, $\gamma$ をガウス写像とした場合のみ考える.)

## 3 Gauss maps and shrinking maps

本節では, $M$ 次元射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ を取り, そのガウス写像を $\gamma : X^{sm} \to \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ と置く. ここでは $\mathscr{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ を $\gamma(X)$ の閉包として定める. この $\mathscr{Y}$ について 定義 5 の層の

射 $\Phi$ を考える. さて, $\Phi$ を $\gamma$ で引き戻すことにすると, つぎの図式を得られる:

$$\begin{tikzcd}
\gamma^*\mathscr{Q}^\vee \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\gamma^*\Phi"] \arrow[drr, bend right, "\Psi"'] & \mathscr{H}om(\mathscr{H}om(\gamma^*\mathscr{Q}^\vee,\gamma^*\mathscr{S}^\vee),\gamma^*\mathscr{S}^\vee) \arrow[r] \arrow[dr, "-\circ d\gamma"'] & \mathscr{H}om(\gamma^* T_{\mathscr{Y}^{sm}},\gamma^*\mathscr{S}^\vee) \arrow[d] \\
 & & \mathscr{H}om(T_{X^{sm}},\gamma^*\mathscr{S}^\vee).
\end{tikzcd} \tag{1}$$

ここで, $\mathscr{Q}=\mathscr{Q}_{\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)}$, $\mathscr{S}=\mathscr{S}_{\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)}$ の様に置いた. また, $\Psi$ を合成写像 $\Psi:\gamma^*\mathscr{Q}^\vee \xrightarrow{\gamma^*\Phi} \mathscr{H}om(\gamma^* T,\gamma^*\mathscr{S}^\vee)\to\mathscr{H}om(T_{X^{sm}},\gamma^*\mathscr{S}^\vee)$ により定義し, ついで $d\gamma$ を次の様な tangent bundle 間の射として定義した:

$$d\gamma: T_{X^{sm}}\to\gamma^* T_{\mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)}\simeq\mathscr{H}om(\gamma^*\mathscr{Q}^\vee,\gamma^*\mathscr{S}^\vee).$$

**注 11.** ガウス写像 $\gamma$ が分離的であるとすると, ある開集合 $X^\circ$ が取れて次が成立する:

$$\ker\gamma^*\Phi|_{X^\circ}=\ker\Psi|_{X^\circ}.$$

というのもこの時, 一般点 $x\in X$ にて (1) における縦の矢印 $\mathrm{Hom}(T_{\gamma(x)}\mathscr{Y},\mathscr{S}^\vee\otimes\gamma(x))\to\mathscr{H}om(T_xX,\mathscr{S}^\vee\otimes\gamma(x))$ は単射的となるからである.

つぎに $\mathscr{O}_X(1):=\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$ とおくと, 縦横について完全な, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathscr{O}_X(-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathscr{O}_X(-1) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \gamma^*\mathscr{Q}^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & H^0(\mathbb{P}^N,\mathscr{O}(1))^\vee\otimes\mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*\mathscr{S}^\vee \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{X^{sm}}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & T_{\mathbb{P}^N}(-1)|_X \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*\mathscr{S}^\vee \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

(なお, $\gamma^*\mathscr{S}^\vee(1)$ は $\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^n}$ に一致し, また $\gamma^*\mathscr{Q}$ は一次の $\mathscr{O}_X(1)$ の principal parts $\mathscr{P}^1_X(\mathscr{O}_X(1))$ に一致する.) ここで $\xi$ を (2) の最初の縦の部分にあらわれる層の射とする. さすれば, 次の

合成射 $d\gamma(-1)\circ\xi$ を得る:

$$d\gamma(-1)\circ\xi : \gamma^*\mathscr{Q}^\vee \xrightarrow{\xi} T_{X^{sm}}(-1) \xrightarrow{d\gamma(-1)} \gamma^* T_{\mathbb{G}(r,\mathbb{P}^n)}(-1)|_X.$$

**注 12.** 点 $x \in X$ について, (2) の二番目の横の成分 $\gamma^*\mathscr{Q}^\vee \otimes k(x) \subset H^0(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(1))^\vee$ は包含関係 $\mathbb{T}_x X \subset \mathbb{P}^N$ に対応する. また (2) の最初の縦の成分により, $\ker(\xi)\otimes k(x) \subset \gamma^*\mathscr{Q}^\vee \otimes k(x)$ は一次元のベクトル空間となり, さらにその射影化は $x \in \mathbb{T}_x X$ に対応することとなる.

以上の設定のもと $\Psi$ と $d\gamma(-1)\circ\xi$ との間の同一視を得ることができる. より正確には:

**定理 13.** ある開集合 $X^\circ \subset X$ について次が成立する:

$$\ker\Psi|_{X^\circ} = \ker d\gamma(-1)\circ\xi|_{X^\circ}.$$

特に, 右側の $X^\circ \times \mathbb{P}^N$ 内での射影化は対角線集合 $\Delta_{X^\circ} := \{(x,x) \in X^\circ \times \mathbb{P}^N \mid x \in X^\circ\}$ を含んでいる.

**注 14.** $(Z^0 : Z^1 : \cdots : Z^N)$ を $\mathbb{P}^N$ の斉次座標とする. このとき標準的開集合 $\mathbb{G}^\circ \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ を $\mathbb{P}^N$ の $M$ 次元線型部分空間で $(N-M-1)$ 次元線型部分空間 $(Z^0 = \cdots = Z^M = 0)$ と交わらないもの全体とおく. なお, $Z_0, \ldots, Z_N$ によって $Z^0, \ldots, Z^N$ の双対基底をあらわすこととする. 以下, 表記をさだめるために, 以下の様に $\mathbb{G}^\circ$ の記述を与えてゆく.

$\mathscr{Q}|_{\mathbb{G}^\circ}$ および $\mathscr{S}^\vee|_{\mathbb{G}^\circ}$ は $\mathbb{G}^\circ$ 上では自由層となる. ここで, $q^i$ は $H^0(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(1)) \otimes \mathscr{O} \to \mathscr{Q}$ のもとでの $Z^i$ の像とし, $s_j$ は $H^0(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(1))^\vee \otimes \mathscr{O} \to \mathscr{S}^\vee$ のもとでの $Z_j$ の像とし, さらに, ふたつのベクトル空間を以下で定める:

$$Q := \bigoplus_{i=0}^{M} K \cdot q^i \ \text{ and } \ S^\vee := \bigoplus_{j=M+1}^{N} K \cdot s_j.$$

このときに, $\mathscr{Q}|_{\mathbb{G}^\circ} = Q \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{G}^\circ}$ および $\mathscr{S}|_{\mathbb{G}^\circ} = S^\vee \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{G}^\circ}$ なる等式を得られる.

さて, ここで以下の標準的同型を得る:

$$\mathbb{G}^\circ \simeq \mathrm{Hom}(Q^\vee, S^\vee) : y \mapsto \sum_{0 \leq i \leq M, M+1 \leq j \leq N} a_i^j \cdot q^i \otimes s_j, \tag{3}$$

ここで $M$ 次元線型部分空間 $y \in \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ はつぎの $(M+1)\times(N+1)$ 行列の横ベクトルで張られるものとなっている:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_0^{M+1} & \cdots & a_0^N \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_1^{M+1} & \cdots & a_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_M^{M+1} & \cdots & a_M^N \end{bmatrix}.$$

**定理 13 の証明.** 一般点 $x_o \in X$ をとり, 次の等式を示せば充分である:

$$\ker\Psi \otimes k(x_o) = \ker(d\gamma(-1)\circ\xi)\otimes k(x_o). \tag{4}$$

以下では二段階にわけて考える. はじめに標準的方法にて $\gamma(x) \in \mathbb{G}(M,\mathbb{P}^N)$ の記述を与える (cf. [FK07, Proof of Proposition]). 次にそれを用いて $\Psi$ をも記述し, さらに $\Psi$ と $d\gamma(-1)\circ\xi$ とが同一視されることを見る.

段階 1. $\mathbb{P}^N$ の座標 $(Z^0 : Z^1 : \cdots : Z^N)$ の変換によって,

$$x_o = (1:0:\cdots:0), \quad \mathbb{T}_{x_o}X = (Z^{M+1} = \cdots = Z^N = 0)$$

となる様にする. さらに元々の埋込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ が $x_o$ のまわりで以下の様にパラメーターづけされていると要請できる:

$$(1 : z^1 : \cdots : z^M : f^{M+1} : \cdots : f^N). \tag{5}$$

ここで $z^1,\dots,z^M$ は 正則局所環 $\mathscr{O}_{X,x}$ の system of regular parameters であり, $f^{M+1},\dots,f^N$ は正則関数である. (5) を横ベクトルとみて $v$ と記す. このとき次の行列を得る:

$$\begin{bmatrix} v \\ v_{z^1} \\ \vdots \\ v_{z^M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^1 & \cdots & z^M & f^{M+1} & \cdots & f^N \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & f^{M+1}_{z^1} & \cdots & f^N_{z^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f^{M+1}_{z^M} & \cdots & f^N_{z^M} \end{bmatrix},$$

ここで $f^j_{z^e} := \partial f^j/\partial z^e$ のように置いた. さて $x_o$ に充分近い点 $x \in X$ について, 埋込み接空間 $\mathbb{T}_x X$ は点 $v(x), v_{z^1}(x), \dots, v_{z^M}(x) \in \mathbb{P}^N$ により張られている事になる. $v$ から $\sum z^e \cdot v_{z^e}$ を引き算して次の行列を得る:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & f^{M+1} - \sum_e z^e f^{M+1}_{z^e} & \cdots & f^N - \sum_e z^e f^N_{z^e} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & f^{M+1}_{z^1} & \cdots & f^N_{z^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f^{M+1}_{z^M} & \cdots & f^N_{z^M} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

これらの横ベクトルは, なおも $\mathbb{T}_x X$ を張ることとなる.

注 14 の様に $\mathbb{G}^\circ$ を置く. すると (3) と (6) とにより, $x_o$ に近い点 $x \in X$ について, $\gamma(x) \in \mathbb{G}^\circ$ は以下で表示されると考えられる:

$$\sum_{M+1\leqslant j\leqslant N}\Big((f^j - \sum_{1\leqslant e\leqslant M} z^e f^j_{z^e})(x)\cdot q^0 \otimes s_j + \sum_{1\leqslant i\leqslant M} f^j_{z^i}(x)\cdot q^i \otimes s_j\Big). \tag{7}$$

段階 2. $Q$ を $\mathscr{Q}\otimes k(\gamma(x_o))$ により, また $S$ を $\mathscr{S}\otimes k(\gamma(x_o))$ により同一視する. 線型写像 $\Psi_{x_o}: Q^\vee \to \mathrm{Hom}(T_{x_o}X, S^\vee)$ は, 図式 (1) を用いて以下の手順により表現が与えられる. まづ $x_o = (1:0:\cdots:0)$ であることと $(f^j - \sum z^e f^j_{z^e})_{z^\nu} = \sum_e z^e f^j_{z^e,z^\nu}$ であることにより, (7) を用いて, 線型写像 $d_{x_o}\gamma: T_{x_o}X \to T_{\gamma(x_o)}\mathbb{G} \simeq \mathrm{Hom}(Q^\vee, S^\vee)$ が以下で与えられるとわかる:

$$\frac{\partial}{\partial z^e} \mapsto \sum_{1\leqslant i\leqslant M, M+1\leqslant j\leqslant N} f^j_{z^i,z^e}(x_o)\cdot q^i \otimes s_j. \tag{8}$$

よって $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(Q^\vee, S^\vee), S^\vee) \to \mathrm{Hom}(T_{x_o}X, S^\vee)$ は次で与えられる:

$$q_0 \otimes s^j \otimes s_\nu \mapsto 0,\ q_i \otimes s^j \otimes s_\nu \mapsto \sum_{1\leqslant e\leqslant M} f^j_{z^i,z^e}(x_o)\cdot dz^e \otimes s_\nu\ (1\leqslant i\leqslant M).$$

いま $Q^\vee \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(Q^\vee, S^\vee), S^\vee)$ は $q_i \mapsto q_i \otimes (\sum_j s^j \otimes s_j)$ により定まるものであったから, 目的の線型写像 $\Psi_{x_o}: Q^\vee \to \mathrm{Hom}(T_{x_o}X, S^\vee)$ は以下で与えられるとわかる:

$$q_0 \mapsto 0,\ q_i \mapsto \sum_{1\leqslant e\leqslant M, M+1\leqslant j\leqslant N} f^j_{z^i,z^e}(x_o)\cdot dz^e \otimes s_j\ (1\leqslant i\leqslant M). \tag{9}$$

さて $\xi_{x_o}: Q^\vee \to T_{x_o}X$ は $\xi_{x_o}(q_0) = 0$ および $\xi_{x_o}(q_e) = \partial/\partial z^e$ $(1\leqslant e\leqslant M)$, により与えられるので線型写像 $d_{x_o}\gamma\circ\xi_{x_o}$ と $\Psi_{x_o}$ とは (8) および (9) により同一視できる. 特にそれらの kernel は一致することとなり等式 (4) の成立を得られる.

また, 注 12 により, 一般点 $x\in X$ について $\ker d_x\gamma\circ\xi_x$ を $\mathbb{P}^N$ 内に射影化したものは $x$ を含むこととなる. よって $X^\circ \times \mathbb{P}^N$ の部分多様体となる $\ker d\gamma(-1)\circ\xi|_{X^\circ}$ の射影化は対角線集合 $\Delta_{X^\circ}$ を含む. □

**定理 7 の (a) ⇒ (b) の証明.** 部分多様体 $\mathscr{Y} \subset \mathbb{G}(M, \mathbb{P}^N)$ を $\gamma(X)$ の閉包として得られるものと置き, $\sigma: \mathscr{Y} \dashrightarrow \mathscr{X}_0 \subset \mathbb{G}(m_0, \mathbb{P}^N)$ によりその shrinking map を表す. ここで, ある開集合 $X^\circ \subset X$ について, $\gamma^*\sigma^* U_{\mathscr{X}_0}|_{X^\circ}$ が $\ker(\gamma^*\Phi)|_{X^\circ}$ の射影化で得られることに注意する. さて, $\gamma$ が分離的なので, 注 11 に述べた様に $\ker\gamma^*\Phi|_{X^\circ} = \ker\Psi|_{X^\circ}$ となる. さらに定理 13 によれば

$$\ker\gamma^*\Phi|_{X^\circ} = \ker(d\gamma(-1)\circ\xi)|_{X^\circ}$$

が成立することとなる. ここで, ふたたび分離性から右側の bundle の階数は $M - \dim\mathscr{Y} + 1$ になると分かる. よって, 等式 $m_0 = M - \dim\mathscr{Y}$ を得られる. さらに, 定理 13 の後半に述べたことから, $\gamma^*\sigma^* U_{\mathscr{X}_0}|_{X^\circ}$ は対角線集合 $\Delta_{X^\circ}$ を含むこととなる. これは等式 $\Gamma(X) = \sigma^* U_{\mathscr{X}_0}$ を導く. というのも, まづ包含関係 $\Gamma(X) \subset \sigma^* U_{\mathscr{X}_0}$ が成立し, ついで, 右辺の次元が $\dim\mathscr{Y} + m_0 = M$ の様に計算されるからである. □

上述した (a) ⇒ (b) の成立により, 分離的ガウス写像の一般ファイバーの線型性が証明される:

**定理 1 の証明.** $\sigma^* U_{\mathscr{X}_0} \to \mathscr{Y}$ の一般ファイバー $F_y$ ($y \in \mathscr{Y}$) に対し, その像 $\sigma^*\pi_0(F_y)$ は $m_0$ 次元の線型多様体 $\sigma(y) \subset \mathbb{P}^N$ に一致する. ここで $\gamma$ が分離的なら, (b) により $\Gamma(X) = \sigma^* U_{\mathscr{X}_0}$ を得て, 以下の図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \sigma^* U_{\mathscr{X}_0} \arrow[d] \arrow[dl, "\sigma^*\pi_0"'] \\
X \arrow[r, dashed, "\gamma"'] & \mathscr{Y}.
\end{tikzcd}$$

故に, $\sigma^*\pi_0$ は双有理であって, 一般点 $y \in \mathscr{Y}$ に対し $\gamma^{-1}(y) = X^{sm} \cap \sigma(y)$ を得る. □

## 4 補足

<u>分離性</u> 有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が**分離的** (separable) であるとは体の拡大 $K(X)/K(f(X))$ が分離的に生成されていることを言う. これは, Zariski 接空間のあいだの線型写像 $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} f(X)$ が一般点 $x \in X$ で全射であることと同値である. 有理写像 $f$ が分離的でないとき, $f$ は**非分離的** (inseparable) であると言う. 正標数においては, ガウス写像は非分離的となりえる (Wallace [W56]).

ところで, ガウス写像 $\gamma$ が分離的であるか, あるいは非分離的であるか, ということは $X$ のもつ幾何学的性質に大きく影響すると考えられる. 非分離的な $\gamma$ の研究としては, §1 で述べた非線形なファイバーの研究に, また, 別の視点のものとして階数零のガウス写像の研究 [FK10], [FFK], [Fur12a] などがある.

<u>再帰性</u> 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して $\check{\mathbb{P}}^N$ により $\mathbb{P}^N$ の超平面全体の集合 $\mathbb{G}(N-1, N)$ をあらわす. ここで以下を定義する:

$$\begin{aligned}
&C(X) := \overline{\{(x, H) \in X^{sm} \times \check{\mathbb{P}}^N \mid \mathbb{T}_x X \subset H\}} && \text{(conormal variety)},\\
&\tau : C(X) \to \check{\mathbb{P}}^N && \text{(conormal map)},\\
&X^* := \tau(C(X)) \subset \check{\mathbb{P}}^N && (X \text{ の双対射影多様体}).
\end{aligned}$$

ここで, $X$ が**再帰的** (reflexive) であるとは, $\mathbb{P} \times \check{\mathbb{P}}^N \simeq \check{\check{\mathbb{P}}} \times \check{\mathbb{P}}^N$ の同一視のもとで $C(X) = C(X^*)$ となることで定義する. 特に, $X$ が再帰的であれば $X^{**} = X$ が成立することもわかる. また, 次のことが知られている: 「$X$ が再帰的であることと, $\tau$ が**分離的**であることとは同値であ

る」(Monge-Segre-Wallace criterion). 故に, 標数零であれば全ての射影多様体は再帰的である.

## 参考文献


[FP] G. Fischer and J. Piontkowski, Ruled varieties, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001.

[Fuk05] S. Fukasawa, Developable varieties in positive characteristic. Hiroshima Math. J. **35** (2005), 167-182.

[Fuk06a] ——, Varieties with non-linear Gauss fibers, Math. Ann. **334** (2006), 235-239.

[Fuk06b] ——, On Kleiman-Piene's question for Gauss maps, Compositio Math. **142** (2006), 1305-1307.

[FFK] S. Fukasawa, K. Furukawa, H. Kaji, Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero, Adv. Math. **224** (2010) 2645–2661.

[FK07] S. Fukasawa and H. Kaji, The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface, Math. Z. **256** (2007), 699-703.

[FK10] S. Fukasawa and H. Kaji, Any algebraic variety in positive characteristic admits a projective model with an inseparable Gauss map, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 3, 297–300.

[Fur12a] K. Furukawa, Cubic hypersurfaces admitting an embedding with Gauss map of rank 0, Adv. Math. **230** (2012) 1174–1183.

[Fur12b] ——, Duality with expanding maps and shrinking maps, and its applications to Gauss maps, arXiv:1110.4841v2.

[GH] P. Griffiths and J. Harris, Algebraic geometry and local differential geometry, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **12** (1979), 355-432.

[IL] T. A. Ivey and J. M. Landsberg, Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems. Grad. Stud. Math. **61**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[Ka86] H. Kaji, On the tangentially degenerate curves. J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 430-440.

[Ka89] ——, On the Gauss maps of space curves in characteristic $p$. Compositio Math. **70** (1989), 177-197.

[Ka03a] ——, On the duals of Segre varieties, Geom. Dedicata **99** (2003), 221-229.

[Ka03b] ——, ガウス写像の非分離性に関する Kleiman-Piene の問題について, 2003 年 1 月 17 日, 代数幾何学シンポジウム —高次元多様体、正標数上の話題を中心として—, 九州大学.

[KP91] S. L. Kleiman and R. Piene, On the inseparability of the Gauss map, "Enumerative Algebraic Geometry (Proceedings of the 1989 Zeuthen Symposium)," Contemp. Math. **123**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 107-129.

[N01] A. Noma, Gauss maps with nontrivial separable degree in positive characteristic. J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 81-93.

[R87] J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic $p$. Math. Ann. **276** (1987), 565-579.

[W56] A. H. Wallace, Tangency and duality over arbitrary fields. Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 321–342.

[Z] F. L. Zak, Tangents and secants of algebraic varieties, Transl. Math. Monographs **127**, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.



*E-mail address*: `katu@toki.waseda.jp`

Department of Mathematics, School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, Ohkubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo, 169-8555, Japan